BERUFSBILDENDE SCHULE WIRTSCHAFT I
LUWIGSHAFEN AM RHEIN
Mundenheimer Straße 220, 67061 Ludwigshafen am Rhein
Telefon 0621 5044007-10, Fax 0621 5044007-98

Das Volumen von Rotationskörpern (1)

Wer einen Töpferkurs besucht hat, weiß, wie Gefäße durch Rotation auf der Töpferscheibe geformt werden. Doch wie lässt sich das Volumen der Gefäße berechnen?

Man könnte sie mit Wasser füllen und die Wassermenge bestimmen. Doch das geht immer erst hinterher und bleibt letztlich doch unbefriedigend, weil nicht vorhersagbar.

Wie so oft hilft auch hier ein einfaches mathematisches Modell weiter. Die Entstehung des Rotationskörpers wird so gedacht, dass sich eine Fläche um die x-Achse als Rotationsachse dreht. Wichtig ist, dass man dann die Randfunktion der Fläche bestimmen kann. Nicht nur gleichmäßig begrenzte Körper wie Zylinder, Kegel und Kugel, deren Volumina schon lange vor der Integralrechnung bekannt waren, sondern auch Körper mit komplizierteren Rändern können berechnet werden, wenn wir eine allgemein anwendbare mathematische Formel zur Berechnung des Volumens angeben können.

Beispiel 1: Zylinder

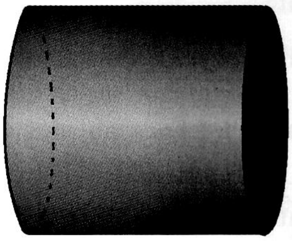


Abb. 10.24

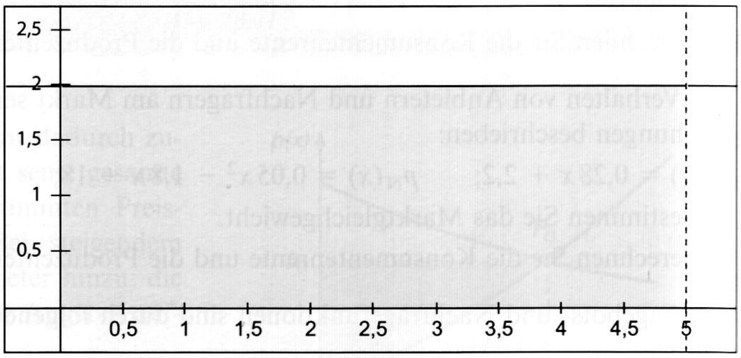


Abb. 10.25

Beispiel 2: Kegel

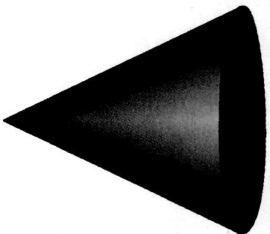
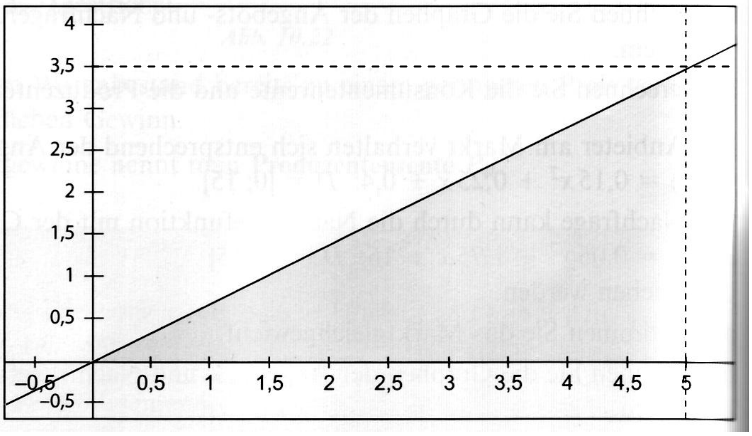


Abb. 10.26



Beispiel 4: Paraboloid

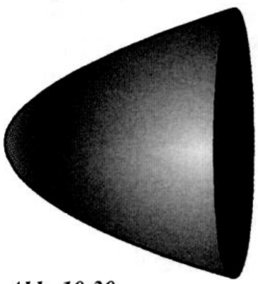
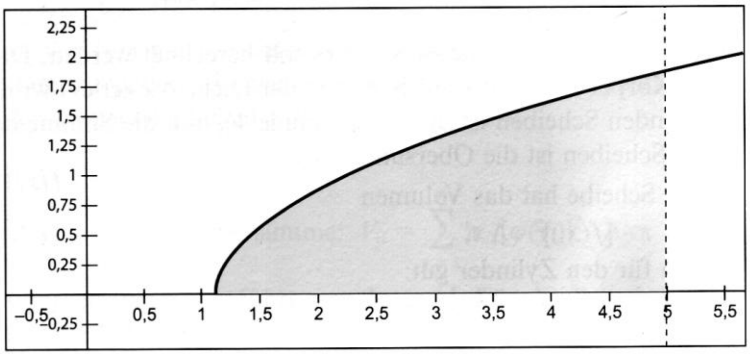


Abb. 10.30



BERUFSBILDENDE SCHULE WIRTSCHAFT I
LUWIGSHAFEN AM RHEIN
Mundenheimer Straße 220, 67061 Ludwigshafen am Rhein
Telefon 0621 5044007-10, Fax 0621 5044007-98

Vollzeitschule
SCHULFORM: Wirtschaftsgymnasium
Stufe/Klasse: Qualifikationsphase
Halbjahr: 12/2

Fach: Mathematik	Lehrer: Hr. Kirchhof	27.04.2020

Das Volumen von Rotationskörpern (2)

In Abb. 10.34 ist der Graph einer Funktion f dargestellt, die den Verlauf der Mantellinie des Drehkörpers beschreibt. Die Funktion sei im Intervall $[a; b]$ stetig und monoton. Die Fläche unter der Kurve im Intervall $[a; b]$ ist gelb unterlegt. Sie wird durch die Geraden $x_1 = a$ und $x_2 = b$ parallel zur x-Achse begrenzt.

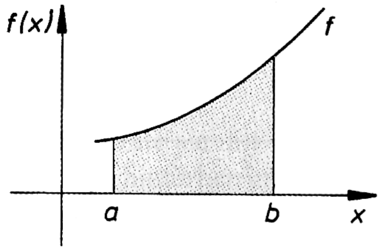


Abb. 10.34

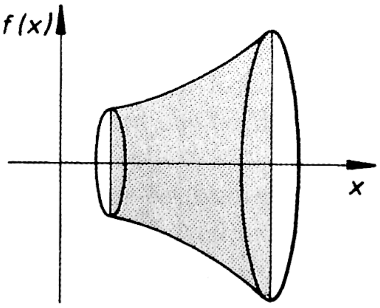


Abb. 10.35

Stellt man sich nun vor, dass diese Fläche um die x-Achse rotiert, so entsteht ein Drehkörper (Abb. 10.35).

Der Rauminhalt V dieses Körpers soll berechnet werden. Dazu stellen wir uns vor, dass der Körper in zylindrische Scheiben der Dicke Δx zerlegt wird. Die Summe der im Körper liegenden Scheiben ist die Untersumme V_u und die Summe der den Körper umschließenden Scheiben ist die Obersumme V_o.

Eine Scheibe hat das Volumen
$V_i = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x$,
denn für den Zylinder gilt:
$V = r^2 \cdot \pi \cdot h,\ h = \Delta x,\ r = f(x_i)$

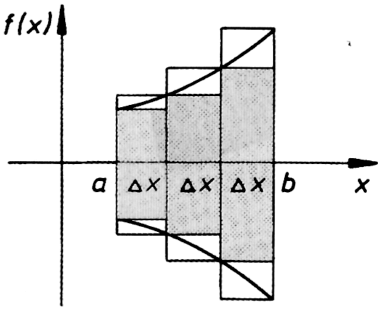


Abb. 10.36

Damit ergibt sich:

$$V_u = \sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad V_o = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x$$

Aus der Flächenberechnung wissen wir, dass der Grenzwert der beiden Summen zum Integral führt. Die Definition des bestimmten Integrals liefert daher

$$V_x = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

Berücksichtigt man, dass π als konstanter Faktor vor das Integralzeichen geschrieben werden kann, so erhält man für die Rotation um die x-Achse die Volumenformel.

Rotation um die *x*-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie das Volumen des auf der S. 1 abgebildeten Zylinders.
2. Bestimmen Sie das Volumen des auf der S. 1 abgebildeten Kegels.
3. Bestimmen Sie das Volumen eines kleinen Glases mit $f(x) = \sqrt{x} + 1$; $I = [0;4]$ (mit Zeichnung!)